問題 $a \overset{\geqq}{\cancel{\neq}} 0$ とする。2つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。

(1)
$C_1 : y = x^2$ —①

$C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ —②

①,②より,

$x^2 = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$

$2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0$ —③

③の判別式をDとするとD>0

$\frac{D}{4} = 9a^2 - 2(a^3 + 3a^2 - 40) > 0$

$-2a^3 + 3a^2 + 80 > 0$

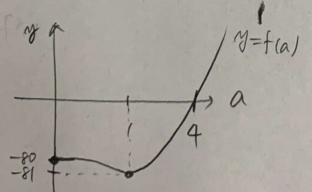
$2a^3 - 3a^2 - 80 < 0$

$f(a) = 2a^3 - 3a^2 - 80$ とすると

$f'(a) = 6a^2 - 6a$

$= 6a(a-1)$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	/	$-$	0	$+$
$f(a)$	-80	↘	-81	↗



$f(a) = 0$ とすると

$2a^3 - 3a^2 - 80 = 0$

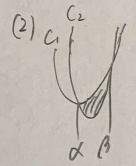
4	2	-3	0	-80
		8	20	80
	2	5	20	0

$(a-4)(\underbrace{2a^2 + 5a + 20}_{+}) = 0$

$a \geqq 0$ で $2a^2 + 5a + 20 > 0$ より, $a = 4$

$\therefore\ 0 \leqq a < 4$

(2)



$S = \int_\alpha^\beta \left[x^2 - \{3(x-a)^2 + a^3 - 40\}\right] dx$

$= \int_\alpha^\beta (-2x^2 + 6ax - a^3 - 3a^2 + 40) dx$

$= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx$

$= -2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3$

$= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3$

③より, $x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 2a^3 - 6a^2 + 80}}{2}$

$= \frac{3a \pm \sqrt{\underset{+}{-2a^3 + 3a^2 + 80}}}{2}$ $=\alpha, \beta$

$\beta - \alpha = \frac{3a + \sqrt{\ }}{2} - \frac{3a - \sqrt{\ }}{2}$

$= \frac{\cancel{2}\sqrt{-2a^3 + 3a^2 + 80}}{\cancel{2}}$

$= \sqrt{-2a^3 + 3a^2 + 80}$

$S = \frac{1}{3}\left(\underset{*}{\boxed{-2a^3 + 3a^2 + 80}}\right)^{\frac{3}{2}}$

＊は(1)より, $a = 1$ のとき最大値81をとる

Sの最大値 $\frac{81^{\frac{3}{2}}}{3} = 243$