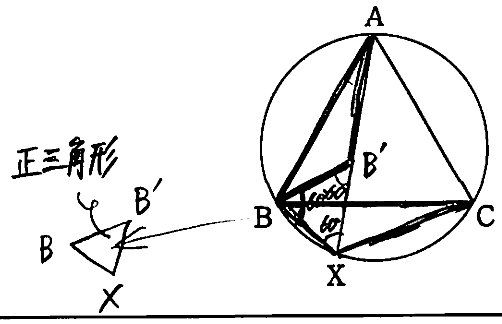
フェルマー点

数学Ⅰ・数学A　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第5問　（選択問題）（配点　20）

ある日，太郎さんと花子さんのクラスでは，数学の授業で先生から次の問題1が宿題として出された。下の問いに答えよ。なお，円周上に異なる2点をとった場合，弧は二つできるが，本問題において，弧は二つあるうちの小さい方を指す。

問題1　正三角形ABCの外接円の弧BC上に点Xがあるとき，AX = BX + CX が成り立つことを証明せよ。



(1) 問題1は次のような構想をもとにして証明できる。

線分AX上にBX = B′X となる点B′をとり，BとB′を結ぶ。AX = AB′ + B′X なので，AX = BX + CX を示すには，AB′ = CX を示せばよく，AB′ = CX を示すには，二つの三角形 $\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ が合同であることを示せばよい。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ の解答の順序は問わない。

⓪ △ABB′　① △AB′C　② △ABX　③ △AXC
④ △BCB′　⑤ △BXB′　⑥ △B′XC　⑦ △CBX

(数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。)

太郎さんたちは，次の日の数学の授業で**問題1**を証明した後，点Xが弧BC上にないときについて先生に質問をした。その質問に対して先生は，一般に次の**定理**が成り立つことや，その**定理**と**問題1**で証明したことを使うと，下の**問題2**が解決できることを教えてくれた。

> **定理**　平面上の点Xと正三角形ABCの各頂点からの距離AX，BX，CXについて，点Xが三角形ABCの外接円の弧BC上にないときは，$AX < BX + CX$が成り立つ。

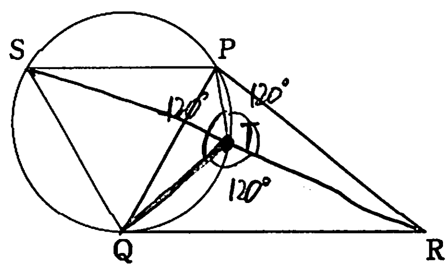
> **問題2**　三角形PQRについて，各頂点からの距離の和$PY + QY + RY$が最小になる点Yはどのような位置にあるかを求めよ。

(数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。)

(2) 太郎さんと花子さんは問題2について，次のような会話をしている。

花子：問題1で証明したことは，二つの線分 BX と CX の長さの和を一つの線分 AX の長さに置き換えられるってことだよね。

太郎：例えば，下の図の三角形 PQR で辺 PQ を1辺とする正三角形をかいてみたらどうかな。ただし，辺 QR を最も長い辺とするよ。辺 PQ に関して点R とは反対側に点 Sをとって，正三角形 PSQ をかき，その外接円をかいてみようよ。



花子：正三角形 PSQ の外接円の弧 PQ 上に点 T をとると，PT と QT の長さの和は線分 $\boxed{\text{ウ}}$ 5 の長さに置き換えられるから，

PT + QT + RT = $\boxed{\text{ウ}}$ ST + RT になるね。

太郎：定理と問題1で証明したことを使うと問題2の点 Y は，点 $\boxed{\text{エ}}$ と点 $\boxed{\text{オ}}$ を通る直線と $\boxed{\text{カ}}$ との交点になることが示せるよ。

花子：でも，∠QPR が $\boxed{\text{キ}}$° より大きいときは，点 $\boxed{\text{エ}}$ と点 $\boxed{\text{オ}}$ を通る直線と $\boxed{\text{カ}}$ が交わらないから，∠QPR が $\boxed{\text{キ}}$° より小さいときという条件がつくよね。

太郎：では，∠QPR が $\boxed{\text{キ}}$° より大きいときは，点 Y はどのような点になるのかな。

(i) $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ PQ　　① PS　　② QS

③ RS　　④ RT　　⑤ ST

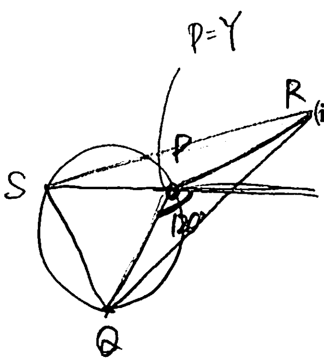
(数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。)

(ii) $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の解答の順序は問わない。

⓪ P　　① Q　　② R　　③ S　　④ T

(iii) $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 辺 PQ　　① 辺 PS　　② 辺 QS
③ 弧 PQ　　④ 弧 PS　　⑤ 弧 QS



(iv) $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

⓪ 30　　① 45　　② 60　　③ 90
④ 120　　⑤ 135　　⑥ 150

(v) ∠QPR が $\boxed{\text{キ}}$° より「小さいとき」と「大きいとき」の点 Y について正しく述べたものを，それぞれ次の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

小さいとき $\boxed{\text{ク}}$　　大きいとき $\boxed{\text{ケ}}$

⓪ 点 Y は，三角形 PQR の外心である。
① 点 Y は，三角形 PQR の内心である。
② 点 Y は，三角形 PQR の重心である。
③ 点 Y は，∠PYR = ∠QYP = ∠RYQ となる点である。
④ 点 Y は，∠PQY + ∠PRY + ∠QPR = 180° となる点である。
⑤ 点 Y は，三角形 PQR の三つの辺のうち，最も短い辺を除く二つの辺の交点である。
⑥ 点 Y は，三角形 PQR の三つの辺のうち，最も長い辺を除く二つの辺の交点である。